

FOCUS ANALITICO



Teoria tecnica della trave: modello di Eulero-Bernoulli
Equazione della linea elastica

marcodepisapia
civilengineer

www.marcodepisapia.com

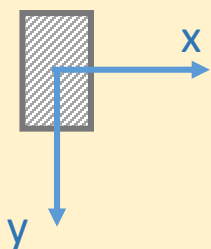


Teoria di Eulero-Bernoulli: problema di flessione e taglio

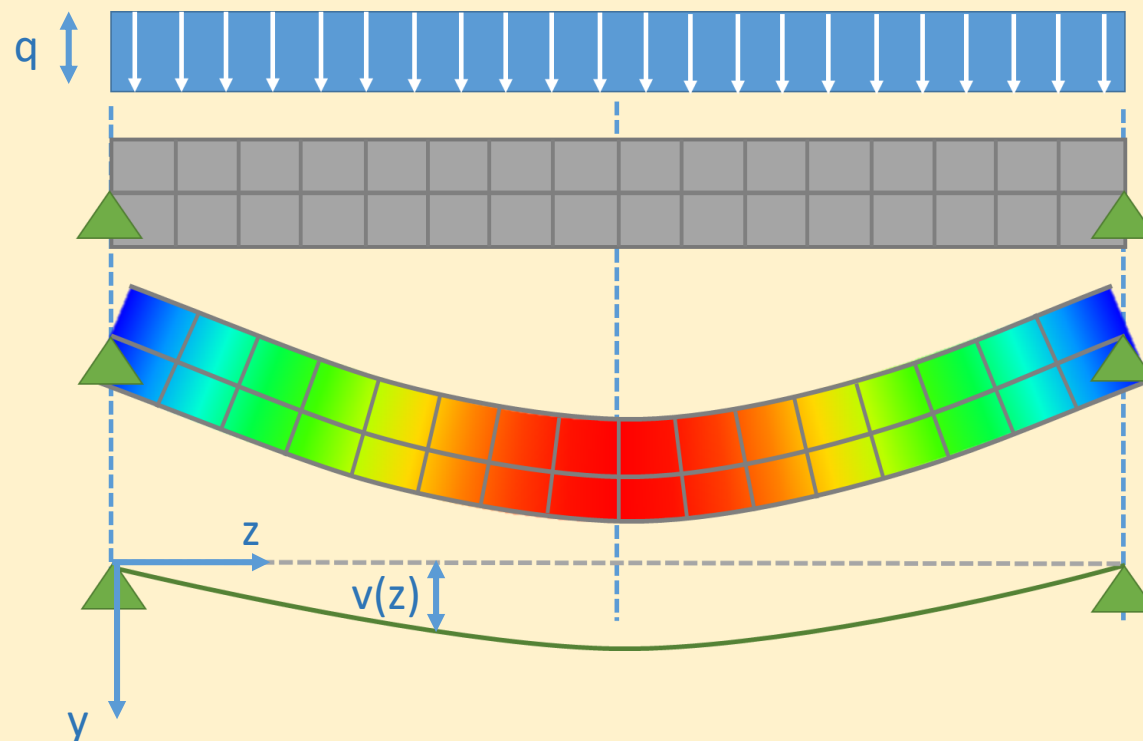
Equazione della linea elastica

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q}{EI}$$

Sezione



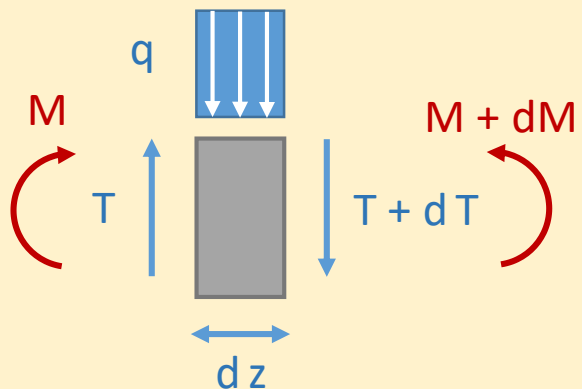
E = modulo elastico normale
 I = momento d'inerzia della sezione





Teoria di Eulero-Bernoulli: problema di flessione e taglio

Equilibrio alla traslazione del concio infinitesimo di trave



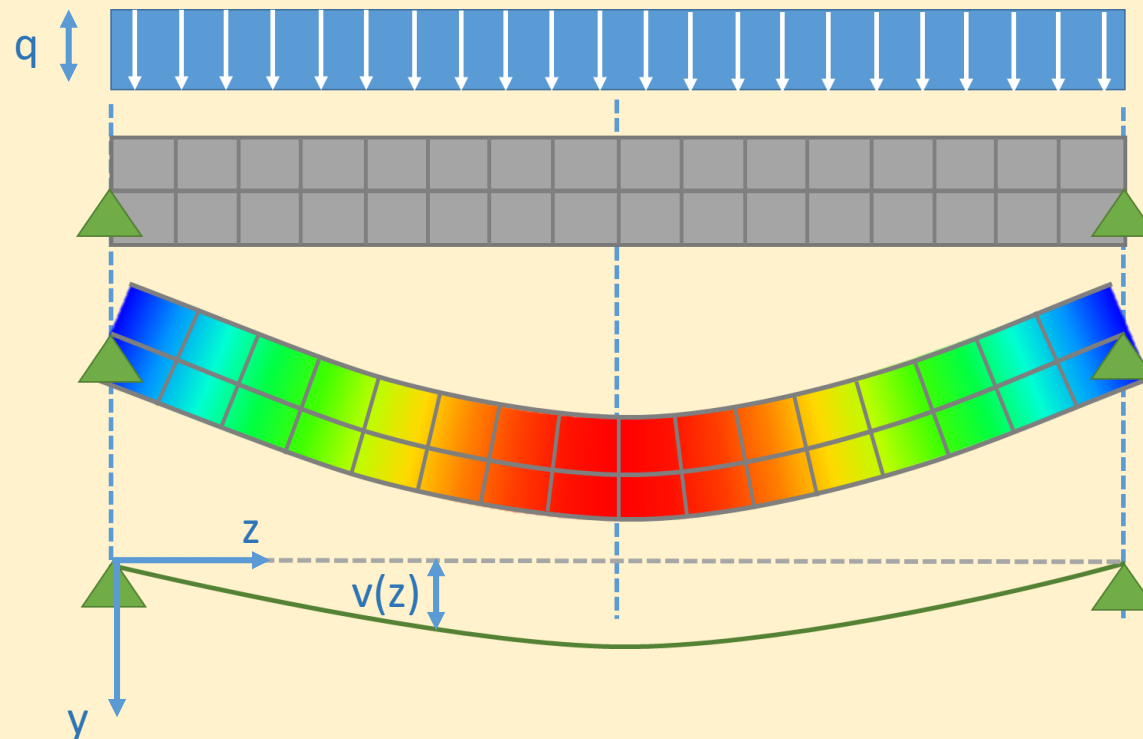
$$\cancel{T} - \cancel{T} - dT - q \, dz = 0$$

$$-dT - q \, dz = 0$$

Dividendo per dz i due membri dell'equazione:

1

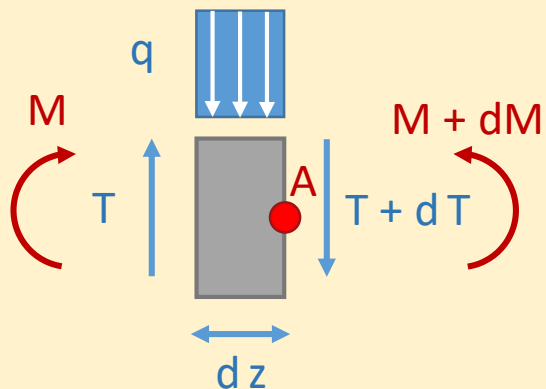
$$\frac{dT}{dz} + q = 0$$





Teoria di Eulero-Bernoulli: problema di flessione e taglio

Equilibrio alla rotazione del concio infinitesimo di trave rispetto al punto A



$$M - (M + dM) + T \cdot dz - (q \cdot dz) \cdot dz/2 = 0$$

$$-dM + T \cdot dz - q \cdot dz^2/2 = 0$$

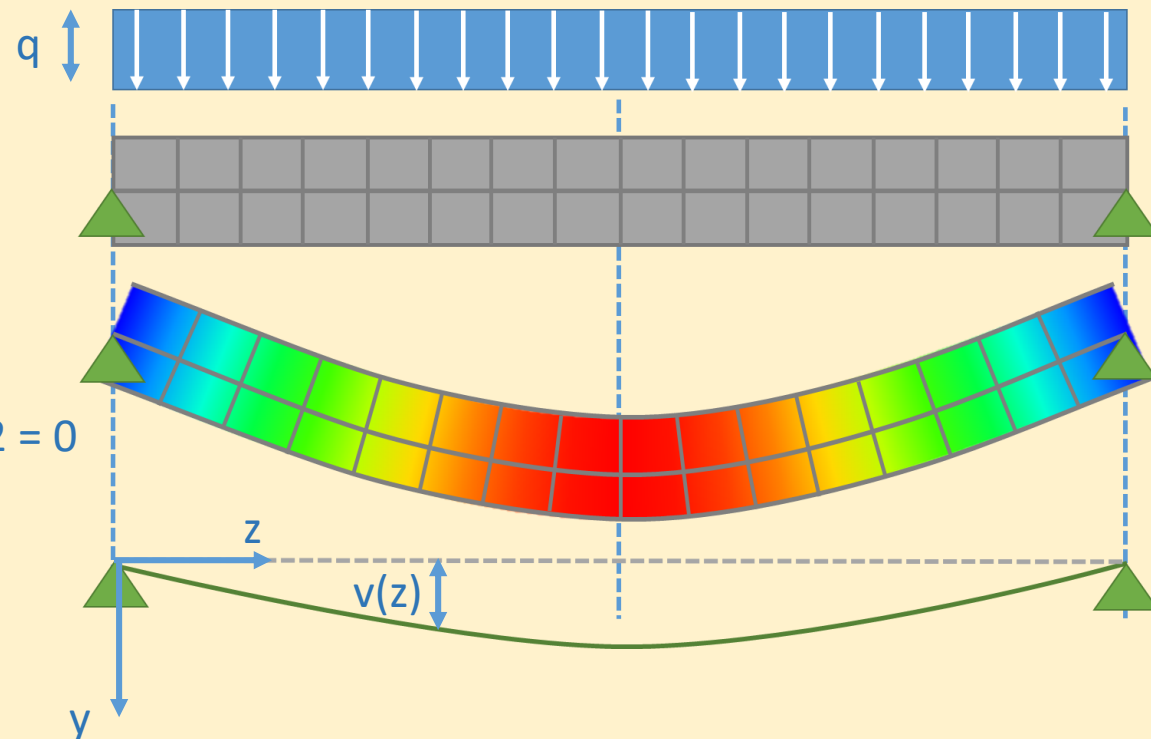
dz^2 si elide, infinitesimo di ordine superiore

$$-dM + T \cdot dz = 0$$

Dividendo per dz i due membri dell'equazione:

2

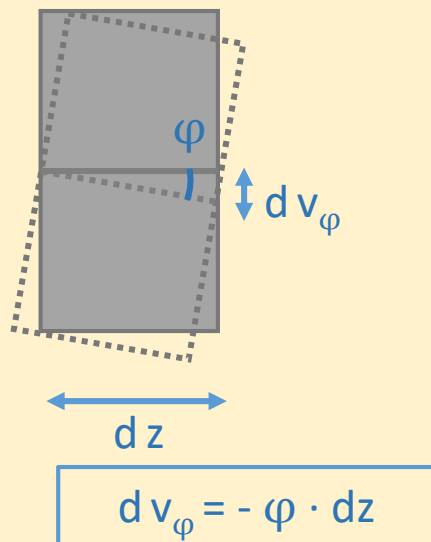
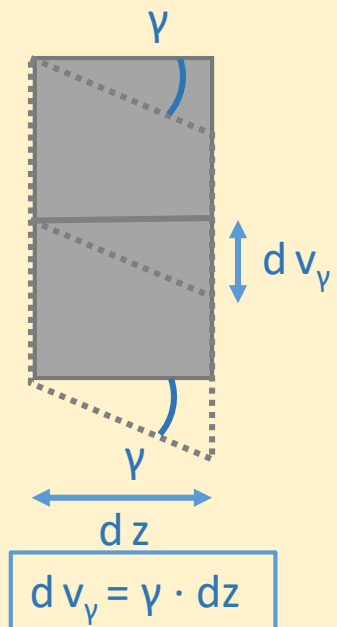
$$\frac{dM}{dz} - T = 0$$





Teoria di Eulero-Bernoulli: problema di flessione e taglio

Equazioni indefinite di congruenza



$$dv = dv_{\gamma} + dv_{\varphi}$$

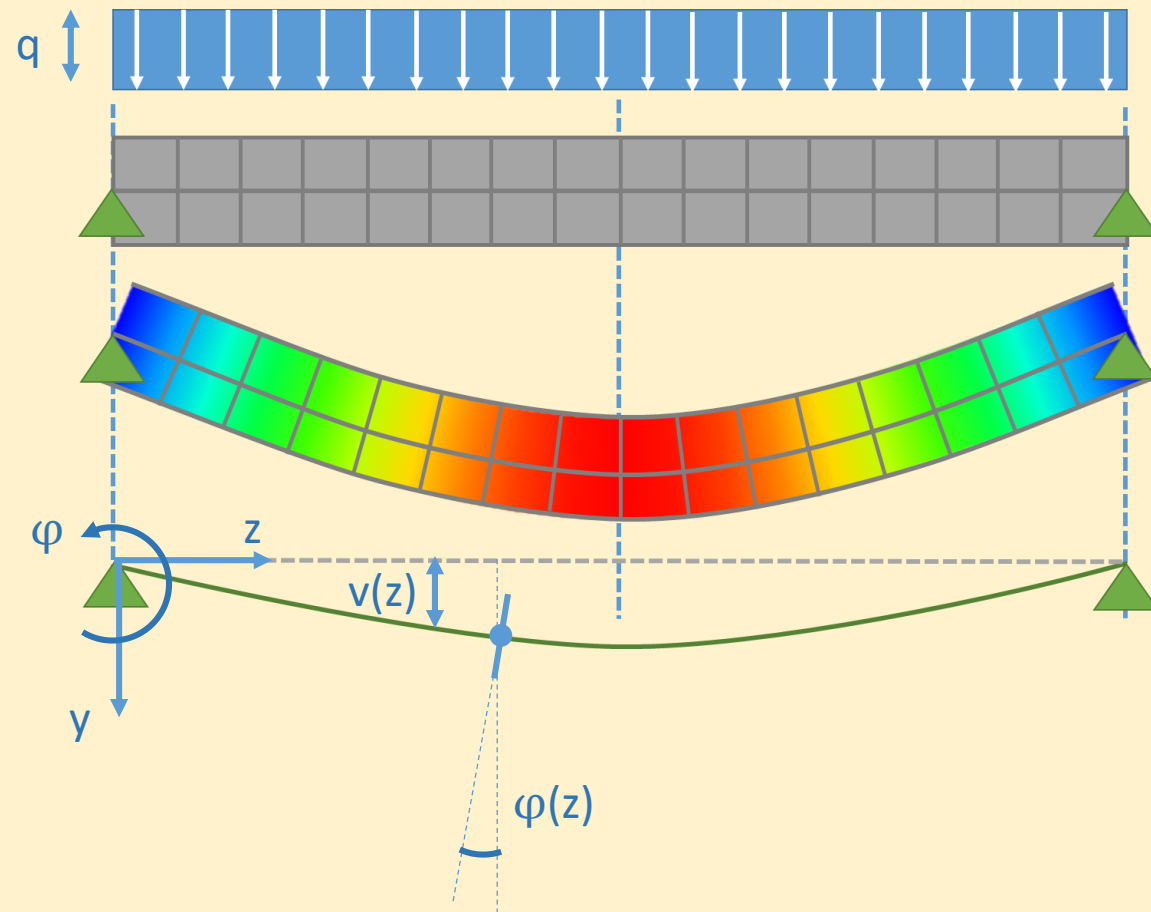
$$dv = \gamma \cdot dz - \varphi \cdot dz$$

$$\frac{dv}{dz} = \gamma - \varphi$$



3

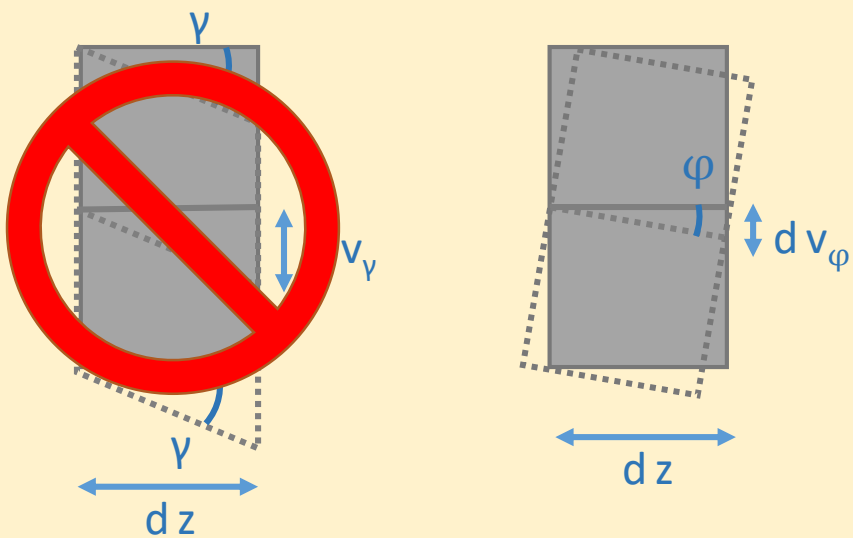
$$\gamma = \frac{dv}{dz} + \varphi$$





Teoria di Eulero-Bernoulli: problema di flessione e taglio

Equazioni indefinite di congruenza



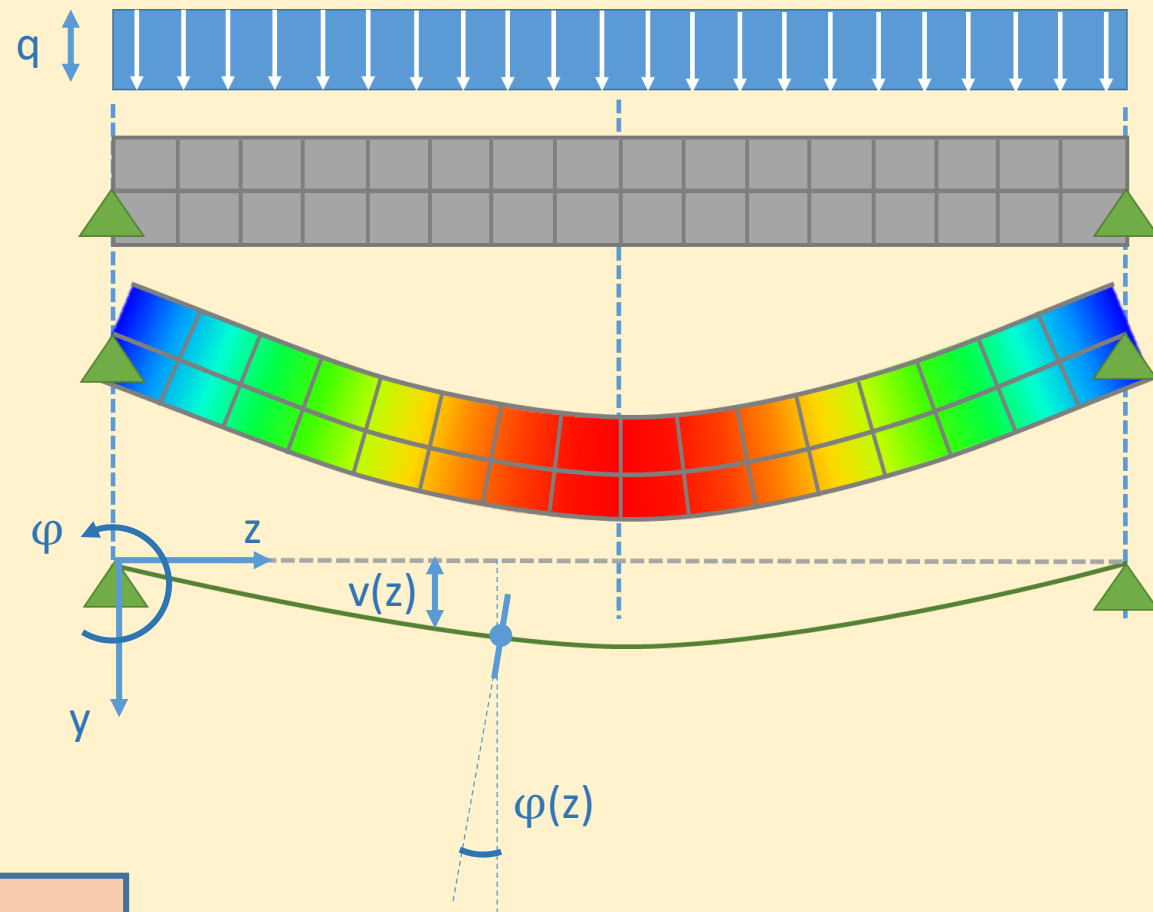
Ipotesi di Eulero-Bernoulli: concio indeformabile a taglio $\rightarrow \gamma = 0$

$$\cancel{\gamma} = \frac{dv}{dz} + \phi$$



3

$$\frac{dv}{dz} = -\phi$$





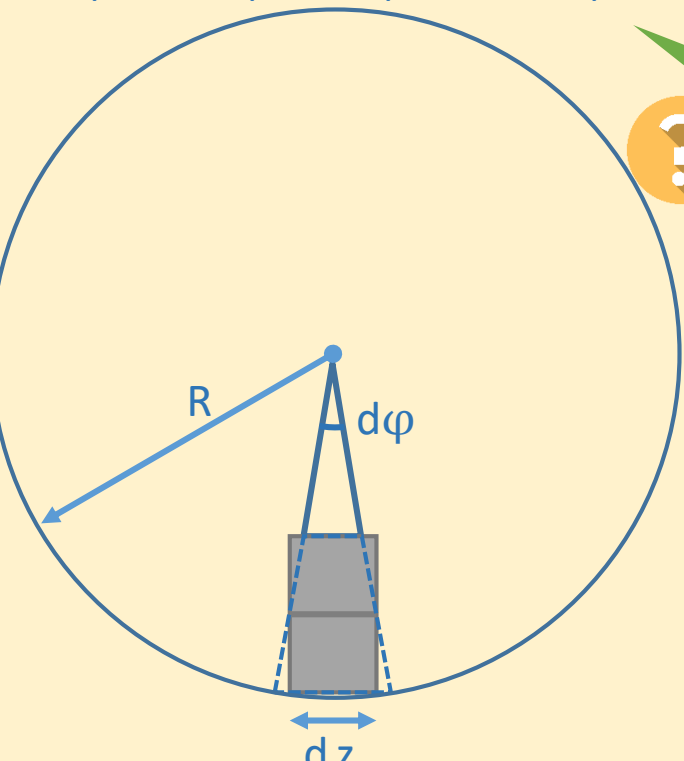
Teoria di Eulero-Bernoulli: problema di flessione e taglio

Equazioni indefinite di congruenza

$$R \cdot d\varphi = dz \quad \longrightarrow \quad \frac{d\varphi}{dz} = 1/R = \theta$$

$$\text{Curvatura: } \theta = \frac{1}{R} = - \frac{d^2 v}{dz^2}$$

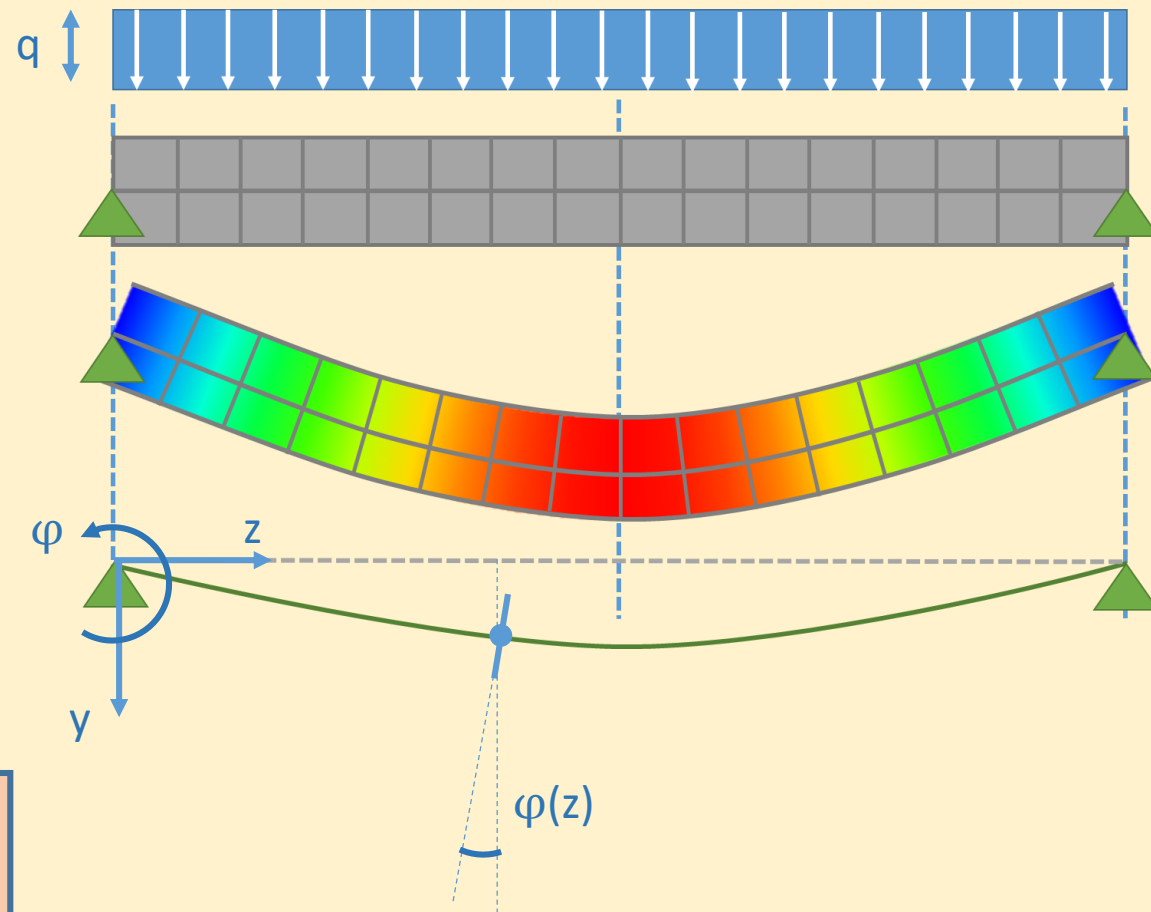
Ipotesi di piccoli spostamenti per la curvatura



[Leggi dal blog \(clicca qui\)](#)

4

$$\frac{d\varphi}{dz} = \theta = - \frac{d^2 v}{dz^2}$$



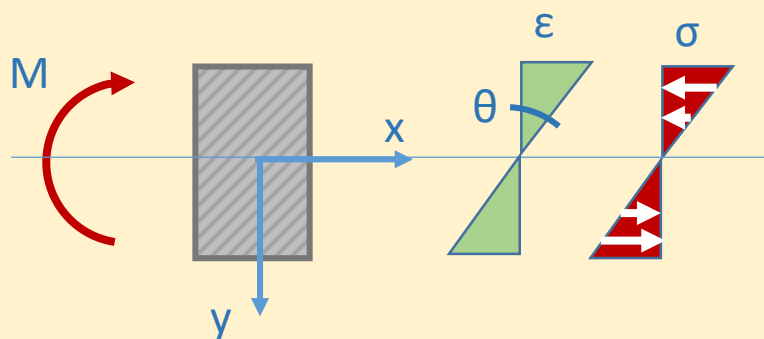
marcodepisapia
civilengineer

www.marcodepisapia.com



Teoria di Eulero-Bernoulli: problema di flessione e taglio

Legame elastico-lineare

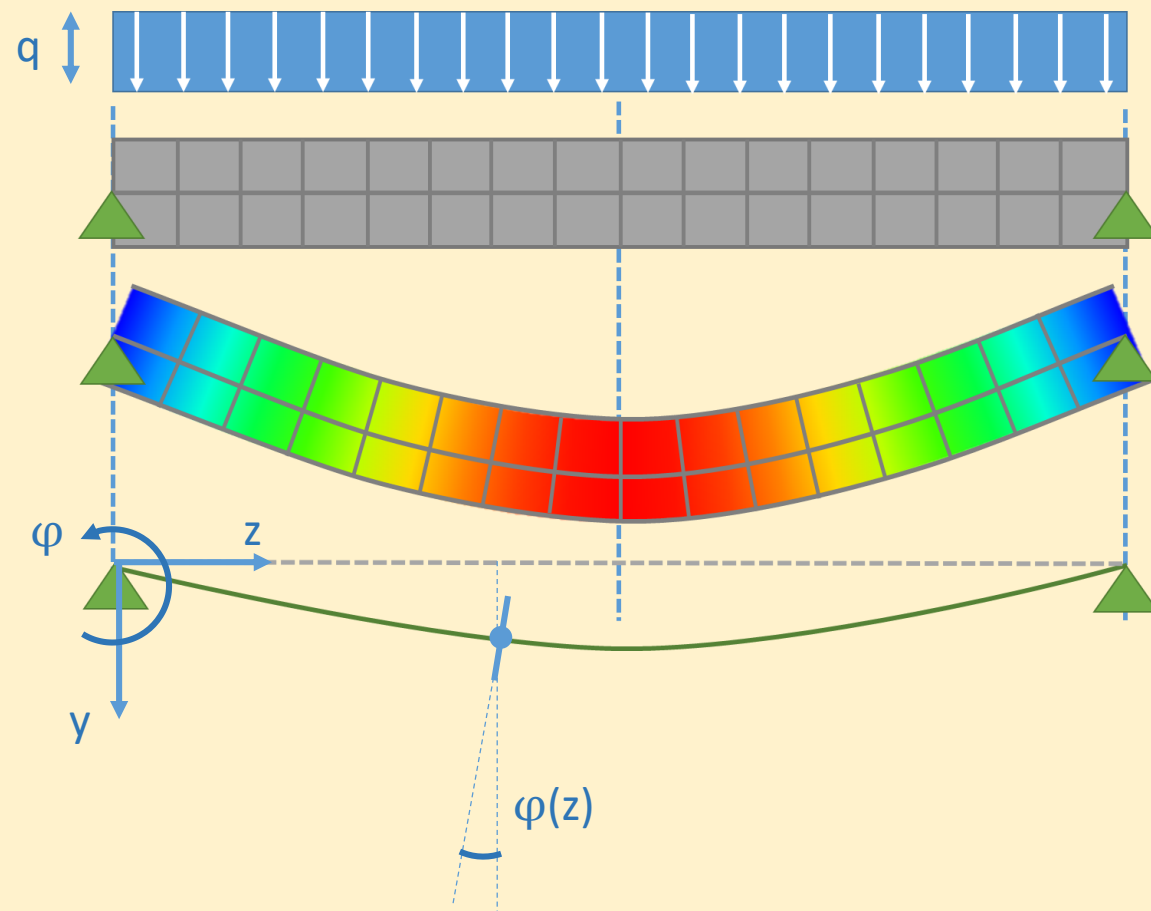


$$M = \int \sigma y \, dA = \int (E \varepsilon) y \, dA = \int (E \theta y) y \, dA = E \theta \underbrace{\int y^2 \cdot dA}_{I} = E \theta I$$

Momento d'inertia I
della sezione

5

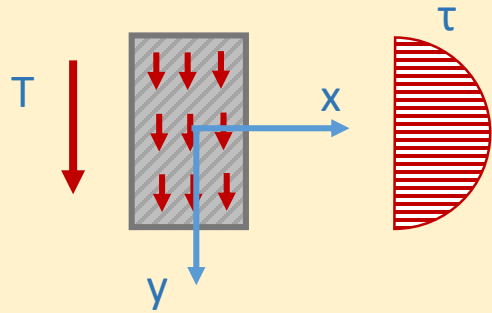
$$\frac{M}{E \cdot I} = \theta$$





Teoria di Eulero-Bernoulli: problema di flessione e taglio

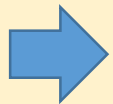
Legame elastico-lineare



$$T = \int \tau dA = \int G \gamma dA = G \gamma \underbrace{\int dA}_{\text{Area della sezione}} = G \gamma A$$



$$T = G \cdot A \cdot \gamma$$



6

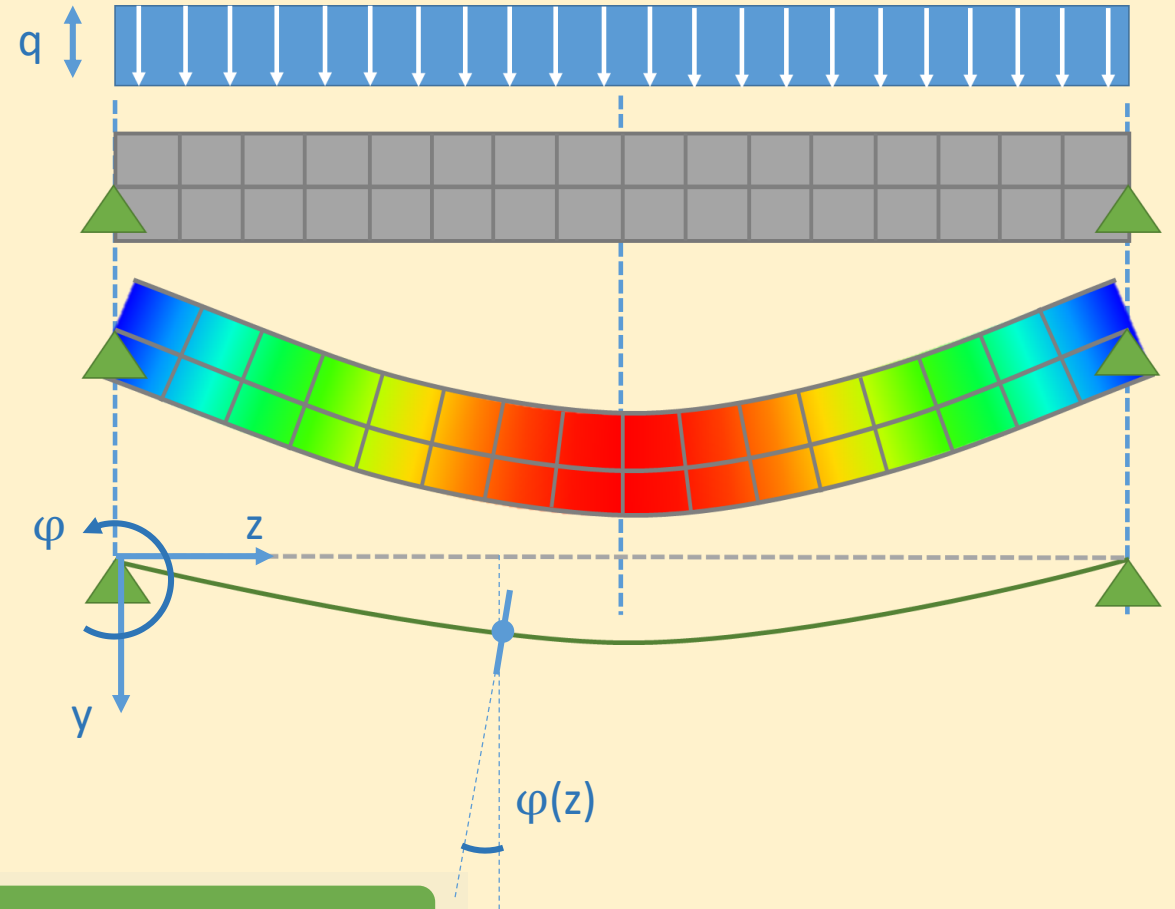
$$T = \frac{G \cdot A \cdot \gamma}{\chi}$$

Indeformabile a taglio

χ = fattore di taglio (fattore di correzione)
Valore adimensionale > 1
tiene conto dell'ingobbamento della sezione



[Leggi dal blog \(clicca qui\)](#)



marcodepisapia
civilengineer

www.marcodepisapia.com



Teoria di Eulero-Bernoulli: problema di flessione e taglio

Equazioni indefinite di equilibrio

$$1 \quad \frac{dT}{dz} + q = 0$$

$$2 \quad \frac{dM}{dz} - T = 0$$

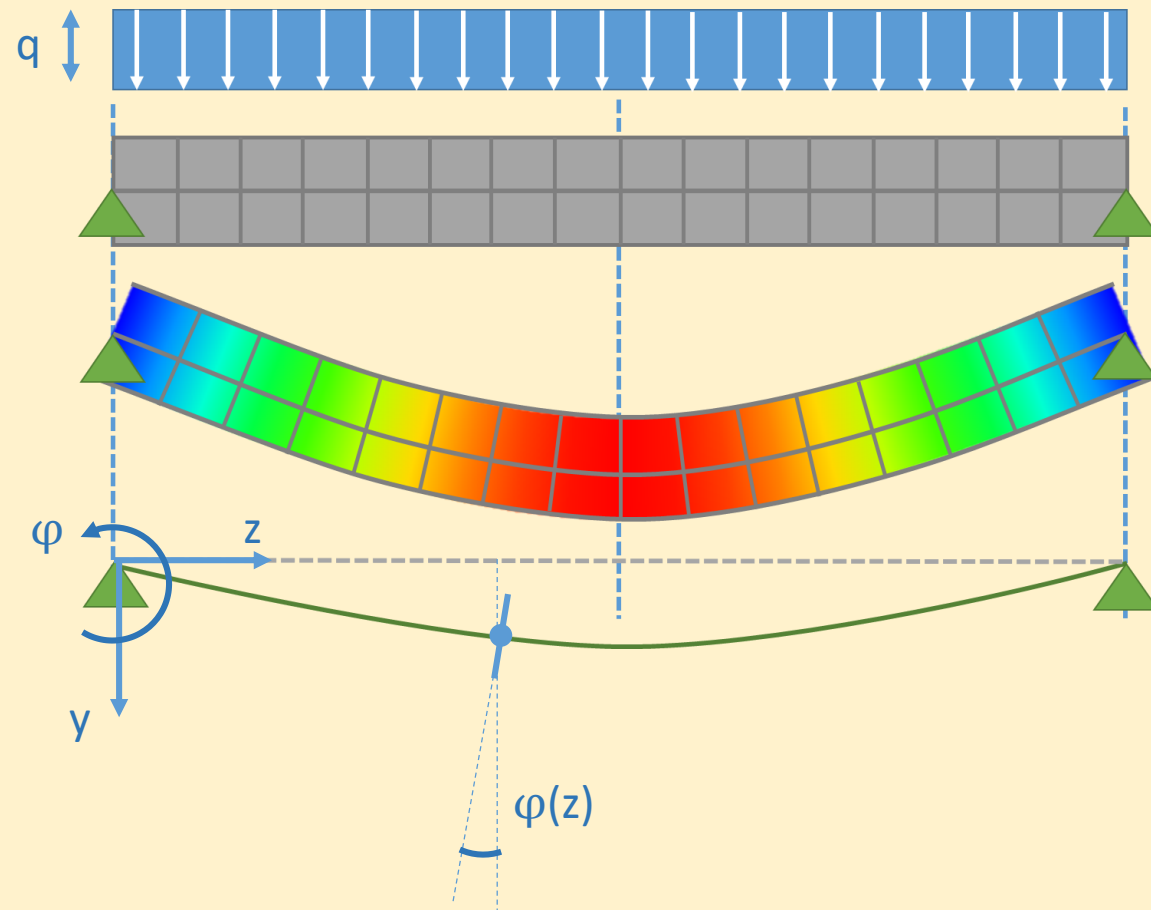
Legame elastico-lineare

$$5 \quad \frac{M}{E \cdot I} = \theta = - \frac{d^2 v}{dz^2}$$

Equazioni indefinite di congruenza

$$3 \quad \frac{dv}{dz} = - \varphi$$

$$4 \quad \frac{d\varphi}{dz} = - \frac{d^2 v}{dz^2}$$





Teoria di Eulero-Bernoulli: problema di flessione e taglio

Dalla (2): $T = \frac{dM}{dz}$

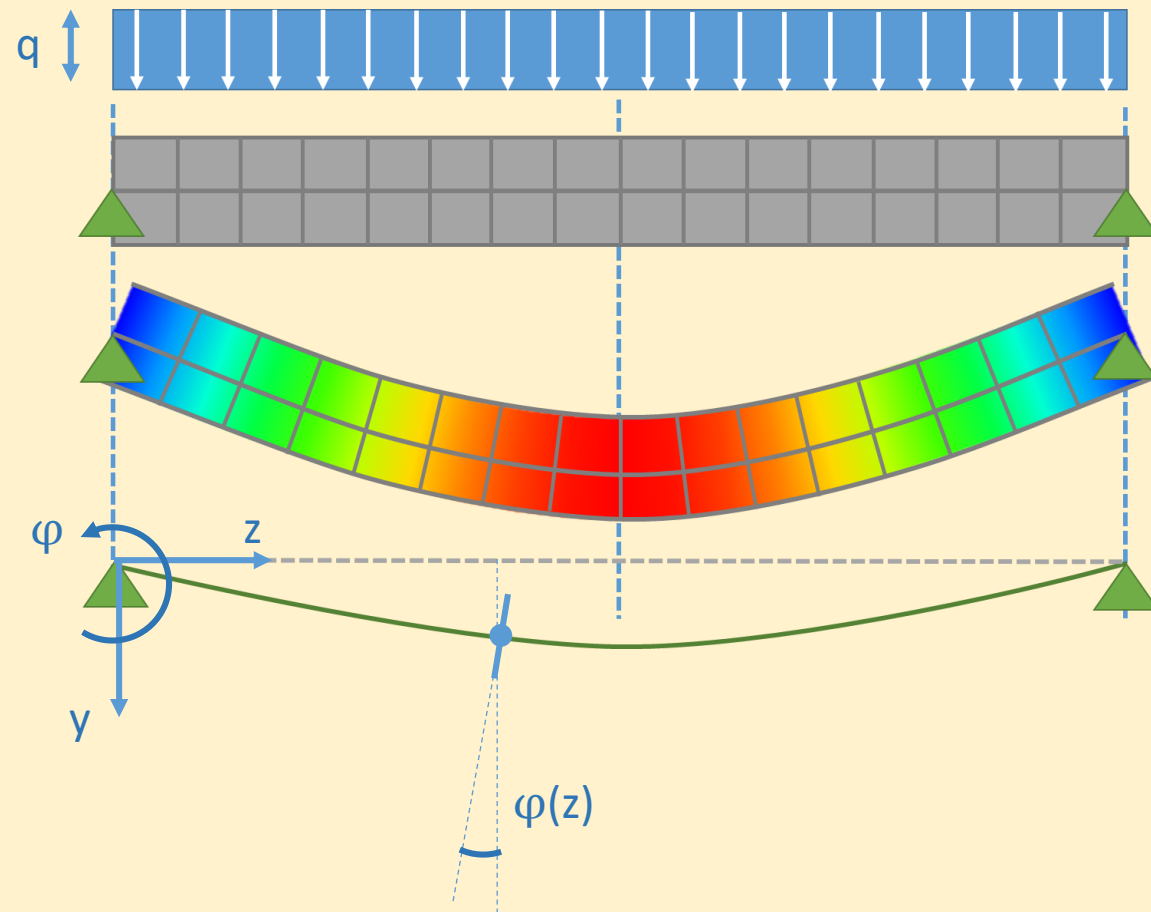
Sostituendo T nella (1): $\frac{d^2 M}{dz^2} = -q$ (a)

Dalla (5): $M = -EI \frac{d^2 v}{dz^2}$

Sostituendo M nella (a):

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q}{EI}$$

Equazione della linea elastica



Per una trattazione rigorosa del problema elastico della trave ti suggerisco le dispense del Prof. Fraternali scaricabili gratuitamente a [questo link](https://www.marcodepisapia.com)

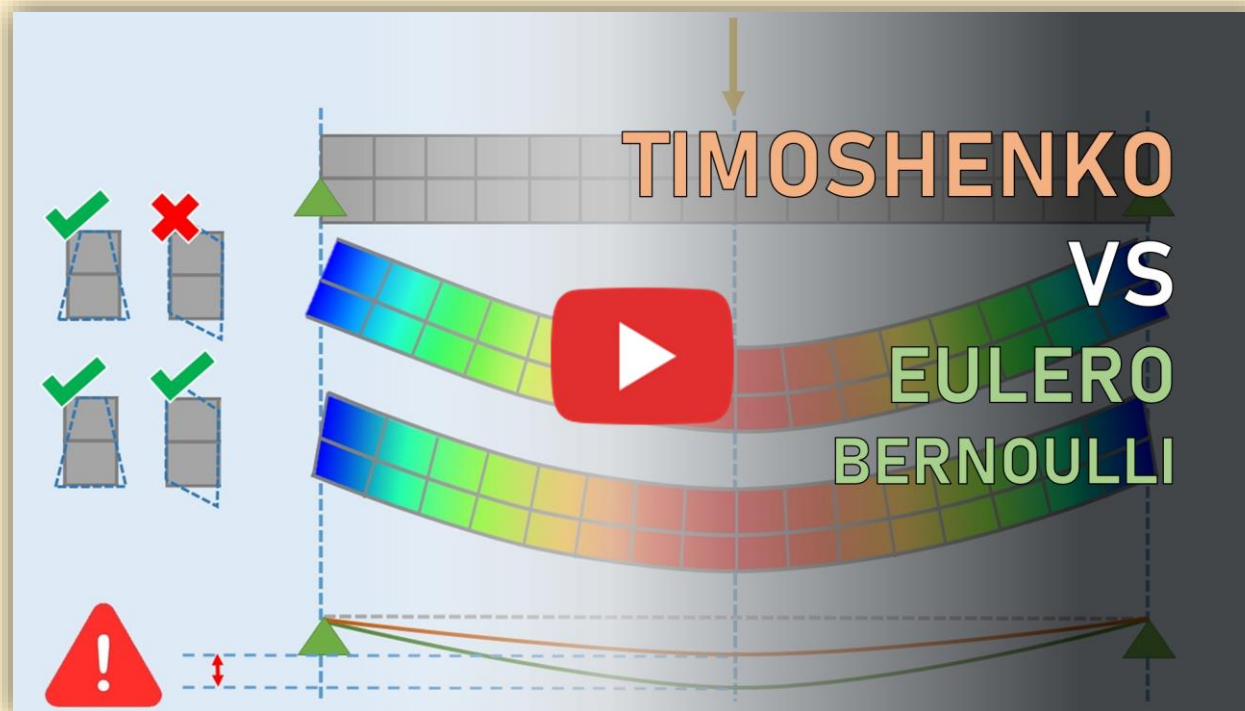
marcodepisapia
civilengineer

www.marcodepisapia.com



Teoria di Eulero-Bernoulli: problema di flessione e taglio

Guarda il video sul problema elastico della trave (clicca su play)



Risorse utili per il calcolo strutturale



Progetta e verifica **sezioni** in cemento armato, solai laterocementizi e interventi di **rinforzo** con materiali innovativi in **FRP**

SCARICA L'APPLICAZIONE >>



Progetta e verifica **travi, colonne e aste pendolo** in acciaio con la massima semplicità. Calcolo di **collegamenti** bullonati e saldati.

SCARICA L'APPLICAZIONE >>

marcodepisapia
civilengineer

www.marcodepisapia.com

Risorse utili per il calcolo strutturale



Progetta e verifica l'intervento di **apertura vano** e il **telaio di cerchiatura** in una parete in muratura. Calcola il legame taglio-spostamento dell'intera parete **prima e dopo** l'intervento.

SCARICA L'APPLICAZIONE >>



Analizza le **sollecitazioni** della platea di fondazione, progetta e verifica l'**armatura**, esegui la **verifica geotecnica** per carico limite e scorrimento.

SCARICA L'APPLICAZIONE >>

marcodepisapia
civilengineer

www.marcodepisapia.com



www.marcodepisapia.com

Articoli Risorse Applicazioni
per progettisti strutturali