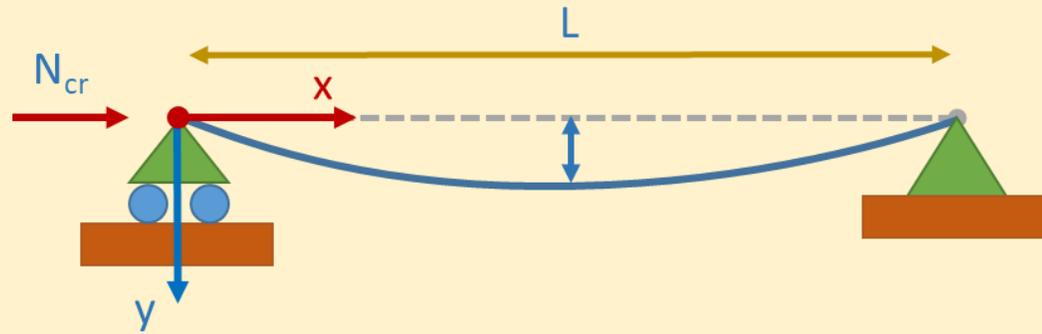


FOCUS ANALITICO



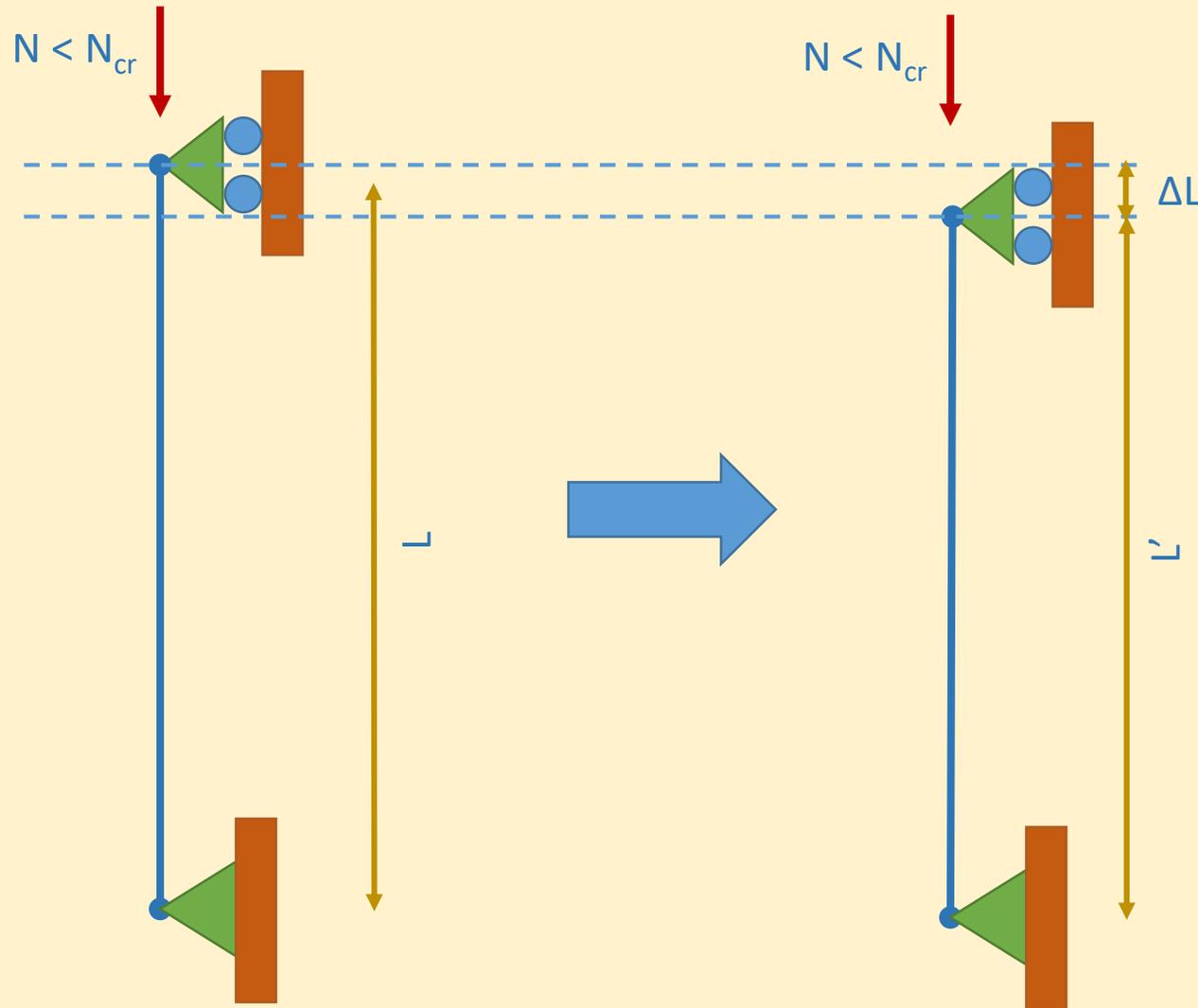
Carico di punta e instabilità euleriana

Calcolo del carico critico euleriano

marcodepisapia
civilengineer

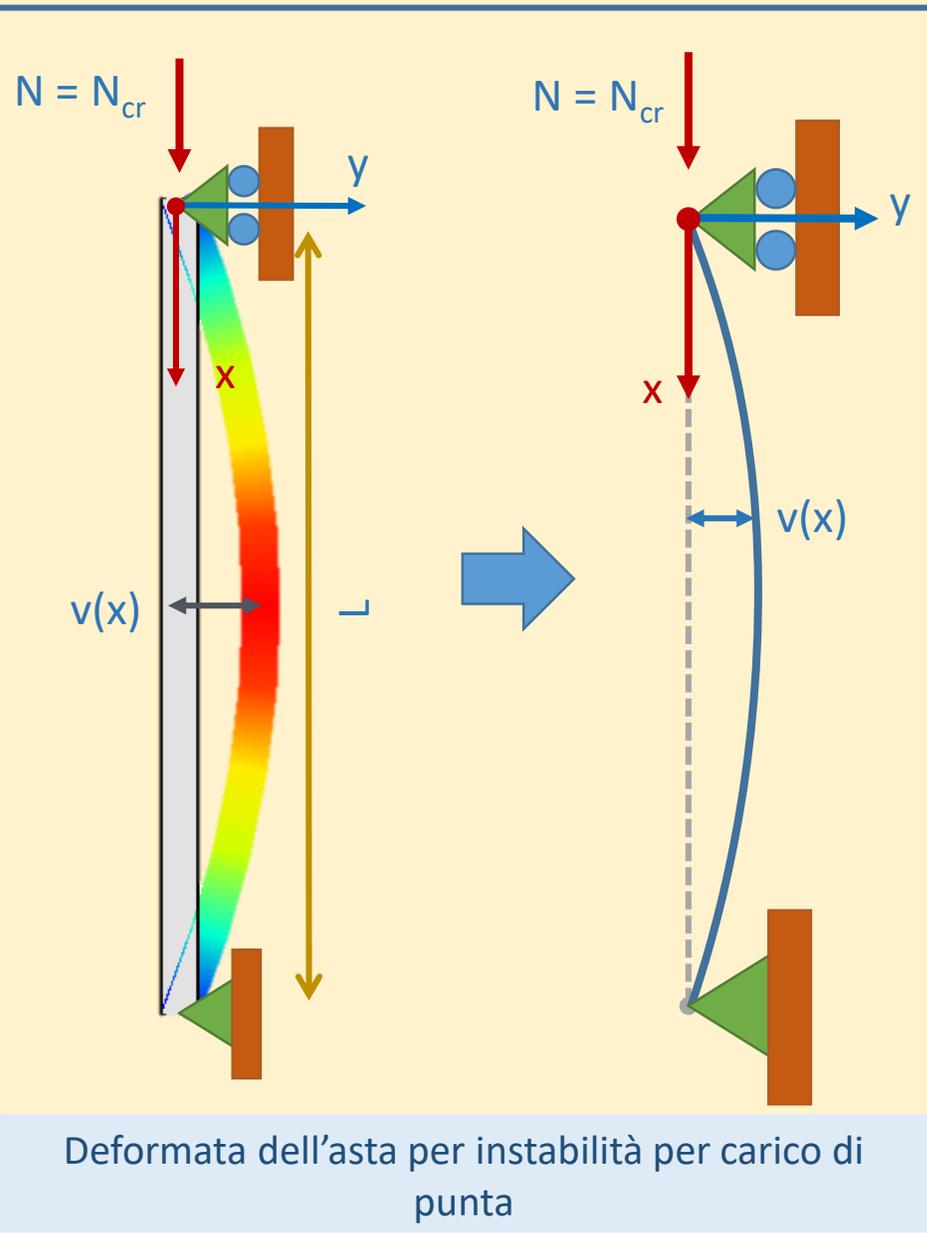
www.marcodepisapia.com

Carico critico euleriano: instabilità per carico di punta



- Sforzo normale $N < N_{cr} \rightarrow$ Assenza di instabilità
- Deformata rettilinea
- Accorciamento dell'asta $\Delta L = N / (E \cdot A) \cdot L$

Carico critico euleriano: instabilità per carico di punta

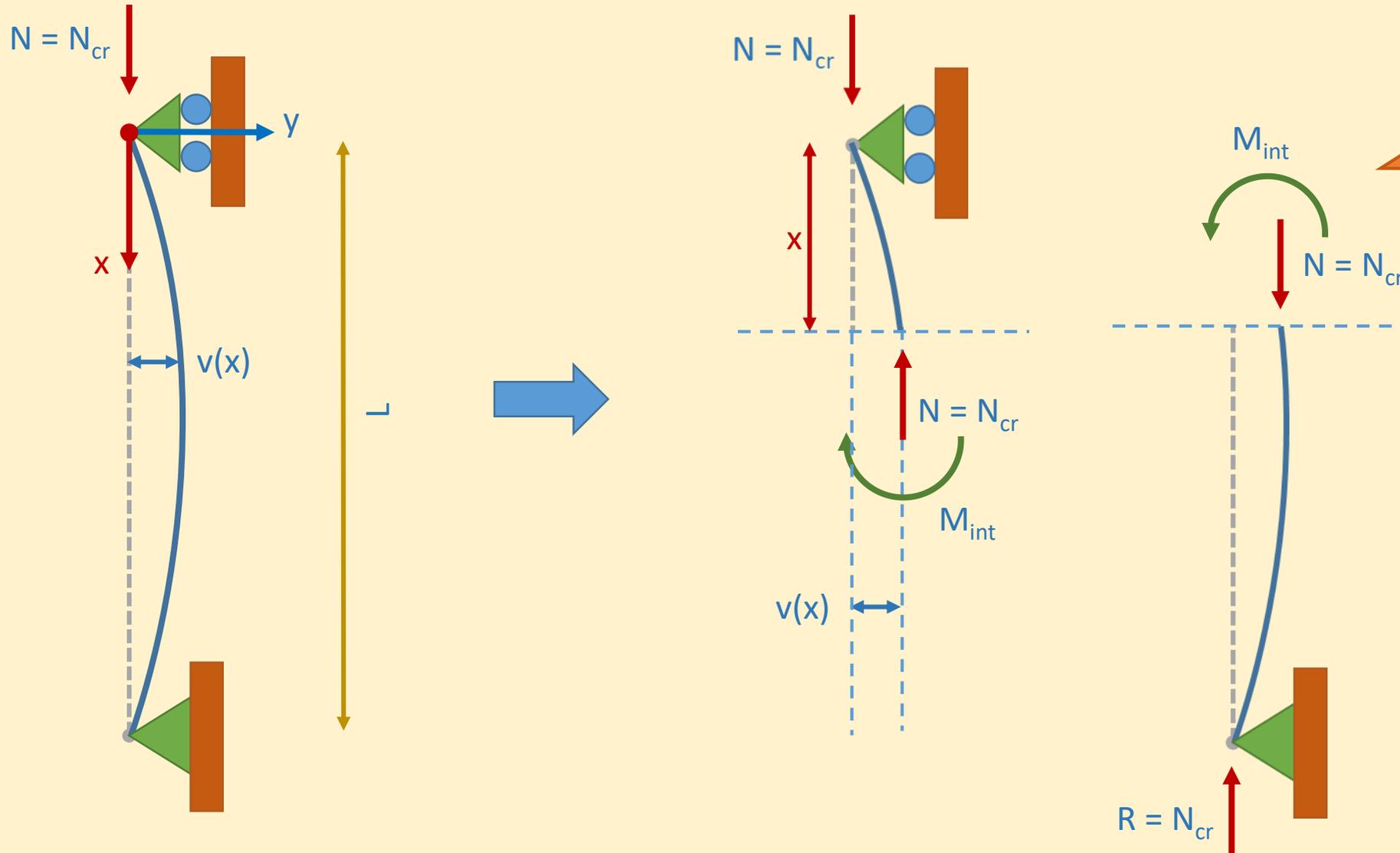


Al crescere del valore dello sforzo normale fino al valore del **carico critico**, prima di raggiungere la resistenza a compressione del materiale, oltre alla deformata rettilinea esiste un'altra configurazione di equilibrio che prevede la linea d'asse dell'asta **inflessa**.

Per ottenere il valore del **carico critico N_{cr}** bisogna imporre l'equilibrio sulla configurazione **deformata** dell'asta, a differenza di quanto si fa normalmente nell'analisi lineare, in cui si ipotizza che la configurazione deformata possa confondersi con la configurazione indeformata e calcolare l'equilibrio su quest'ultima. Per ottenere la formula del **carico critico euleriano** di stabilità bisognerà pertanto:

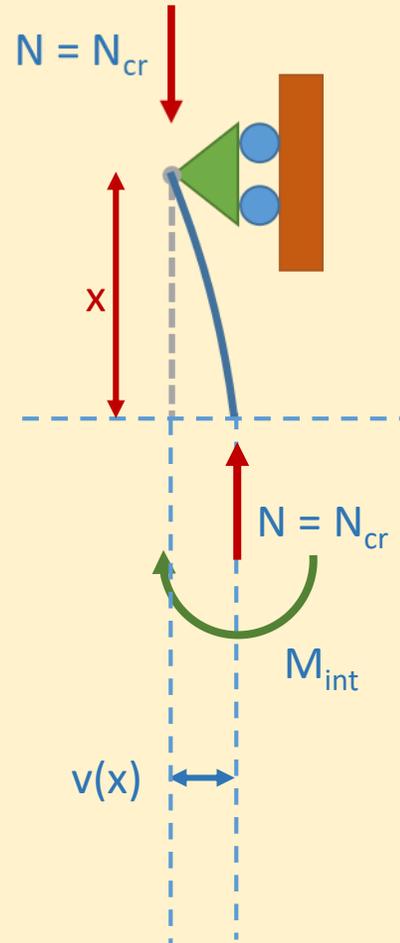
- eseguire un'analisi del **secondo ordine** ([leggi dal blog](#))
- considerare le **non linearità geometriche** del sistema ([leggi dal blog](#))
- mantenere valida l'ipotesi di **piccoli spostamenti** ([leggi dal blog](#)).

Carico critico euleriano: instabilità per carico di punta



Forze agenti sulla configurazione deformata

Carico critico euleriano: instabilità per carico di punta



Analisi del secondo ordine: scrittura dell'equazione di equilibrio sulla configurazione deformata.

$$M_{est} = M_{int} \quad (\text{equilibrio alla rotazione})$$

$$M_{est} = N_{cr} \cdot v(x) \quad (\text{forza per il braccio della coppia})$$

$$M_{int} = - E \cdot I \cdot v''(x) \quad (\text{Legame elastico lineare momento-curvatura})$$

$v''(x)$ = derivata seconda di $v(x)$ rispetto ad x

I = momento d'inerzia della sezione

E = modulo elastico del materiale

$$M_{est} = M_{int} \rightarrow N_{cr} \cdot v(x) = - E \cdot I \cdot v''(x)$$

$$E \cdot I \cdot v''(x) + N_{cr} \cdot v(x) = 0$$

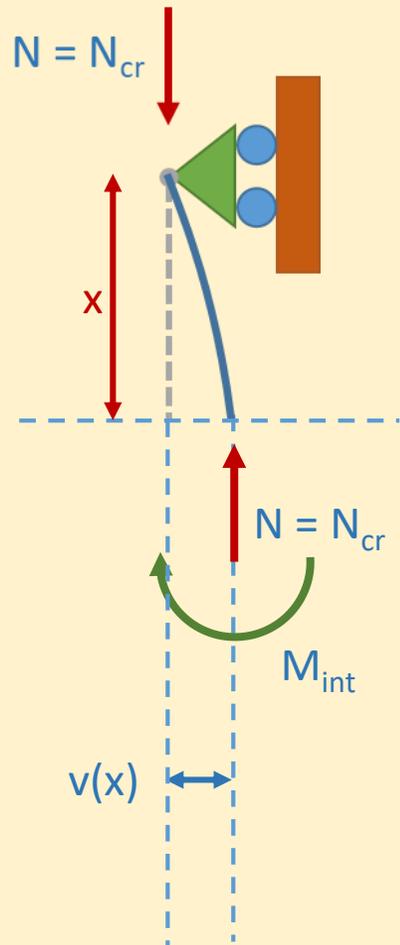
$$v''(x) + \frac{N_{cr}}{EI} v(x) = 0$$

Equazione differenziale del problema di stabilità per carico di punta

marcodepisapia
civilengineer

Vedi equazione 5 di questo [Focus analitico](#)

Carico critico euleriano: instabilità per carico di punta



Risoluzione dell'equazione differenziale del problema

$$v''(x) + \frac{N_{cr}}{EI} v(x) = 0$$

Ponendo $\alpha^2 = \frac{N_{cr}}{EI}$

e sostituendo α^2 nell'equazione differenziale si ottiene:

$$v''(x) + \alpha^2 v(x) = 0$$

Tale equazione ammette la soluzione generale seguente:

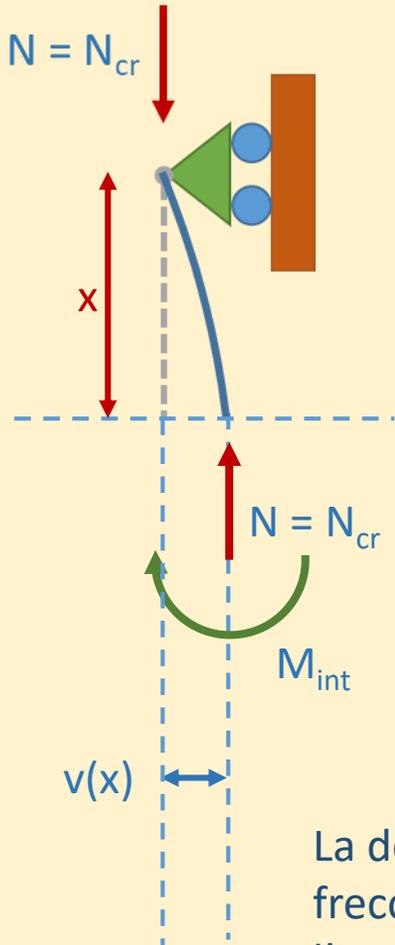
$$v(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x)$$

Le costanti A e B si ottengono imponendo le condizioni al contorno sullo spostamento alle estremità dell'asta in funzione dei vincoli presenti (asta appoggiata-incernierata)

$$v(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$v(L) = 0 \rightarrow A \sin(\alpha L) = 0$$

Carico critico euleriano: instabilità per carico di punta



La condizione al contorno $v(L) = 0$ ammette due possibili soluzioni:

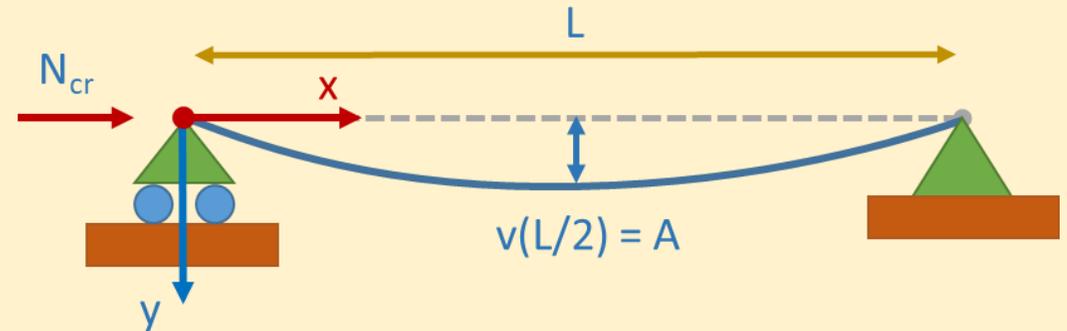
$$v(L) = 0 \rightarrow A \operatorname{sen}(\alpha L) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha L) = 0 \rightarrow \alpha L = \pi \rightarrow \alpha = \pi/L \quad (A = \text{qualsiasi}) \end{array} \right.$$

Da qui si ricaverà il carico critico

Alla soluzione $A = 0$ corrisponde la deformata rettilinea dell'asta, ossia assenza di instabilità. Alla soluzione $\alpha = \pi/L$ corrisponde una deformata sinusoidale dell'asta in condizioni di equilibrio:

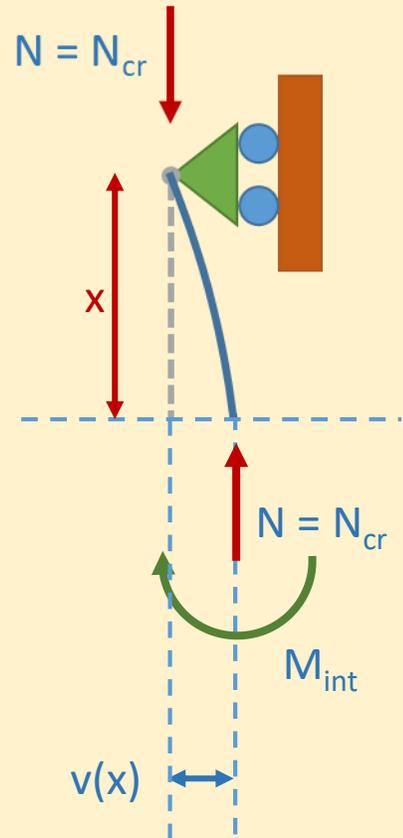
$$v(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L} x\right)$$

$$v(L/2) = A \operatorname{sen}(\pi/2) = A$$



La deformata sinusoidale dell'asta è una configurazione di equilibrio a prescindere dal valore della freccia massima, potendo assumere la costante A un valore qualsiasi. L'importante è che si rispetti l'ipotesi di piccoli spostamenti per assicurare la validità della trattazione del problema.

Carico critico euleriano: instabilità per carico di punta



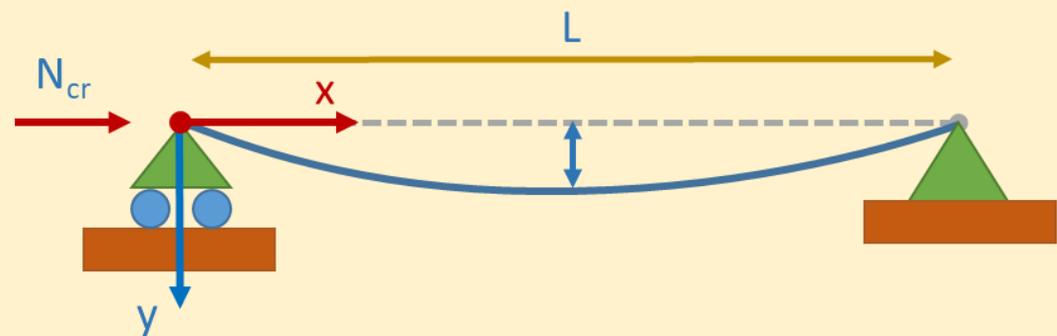
Dalla condizione al contorno $v(L) = 0$ si ricava la formula del carico critico euleriano:

$$\alpha = \pi/L$$

Dalla posizione $\alpha^2 = \frac{N_{cr}}{EI}$ si ottiene: $\alpha = \sqrt{\frac{N_{cr}}{EI}}$

$$\alpha = \pi/L \rightarrow \sqrt{\frac{N_{cr}}{EI}} = \pi/L \rightarrow \boxed{N_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} EI}$$

Carico critico euleriano



Per tenere conto delle condizioni di vincolo al valore di L si sostituisce la lunghezza di libera inflessione $L_0 = \beta L$, in cui β è un coefficiente funzione delle condizioni vincolari.

$$\boxed{N_{cr} = \frac{\pi^2}{L_0^2} EI}$$

Trovi tutti i valori dei coefficienti β in [quest'articolo](#) del blog

Carico critico euleriano: instabilità per carico di punta

Il carico critico viene solitamente espresso in funzione della snellezza λ dell'asta.
Dall'espressione del raggio di inerzia ρ della sezione si ottiene:

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{A}} \rightarrow I = \rho^2 A$$

Sostituendo l'espressione $I = \rho^2 A$ nella formula del carico critico si ottiene:

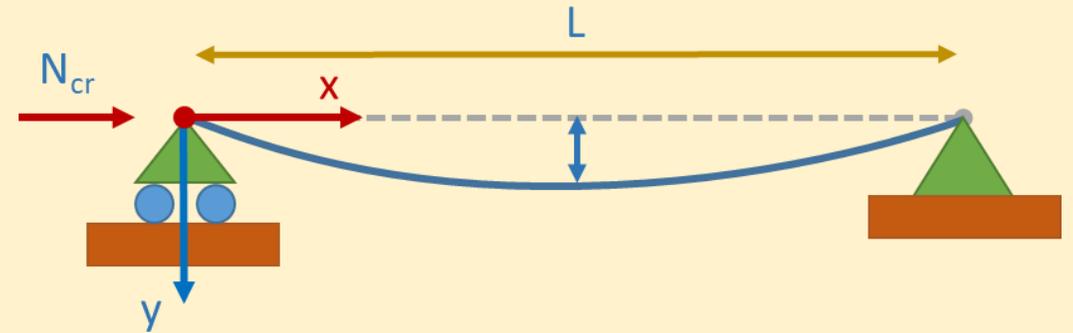
$$N_{cr} = \frac{\pi^2}{L_0^2} EI = \frac{\pi^2}{L_0^2} E \rho^2 A = \pi^2 E A \frac{\rho^2}{L_0^2}$$

La snellezza λ si definisce come il rapporto fra la lunghezza di libera inflessione dell'asta e il raggio d'inerzia:

$$\lambda = \frac{L_0}{\rho} \quad \text{snellezza } \lambda$$

Sostituendo la snellezza nella formula del carico critico si ottiene:

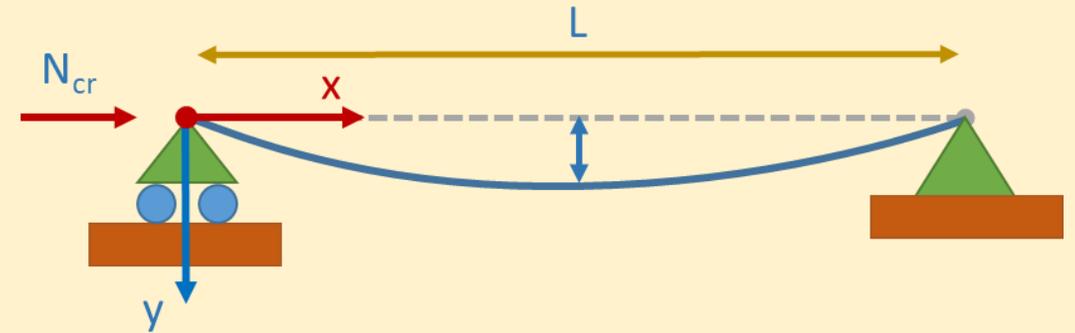
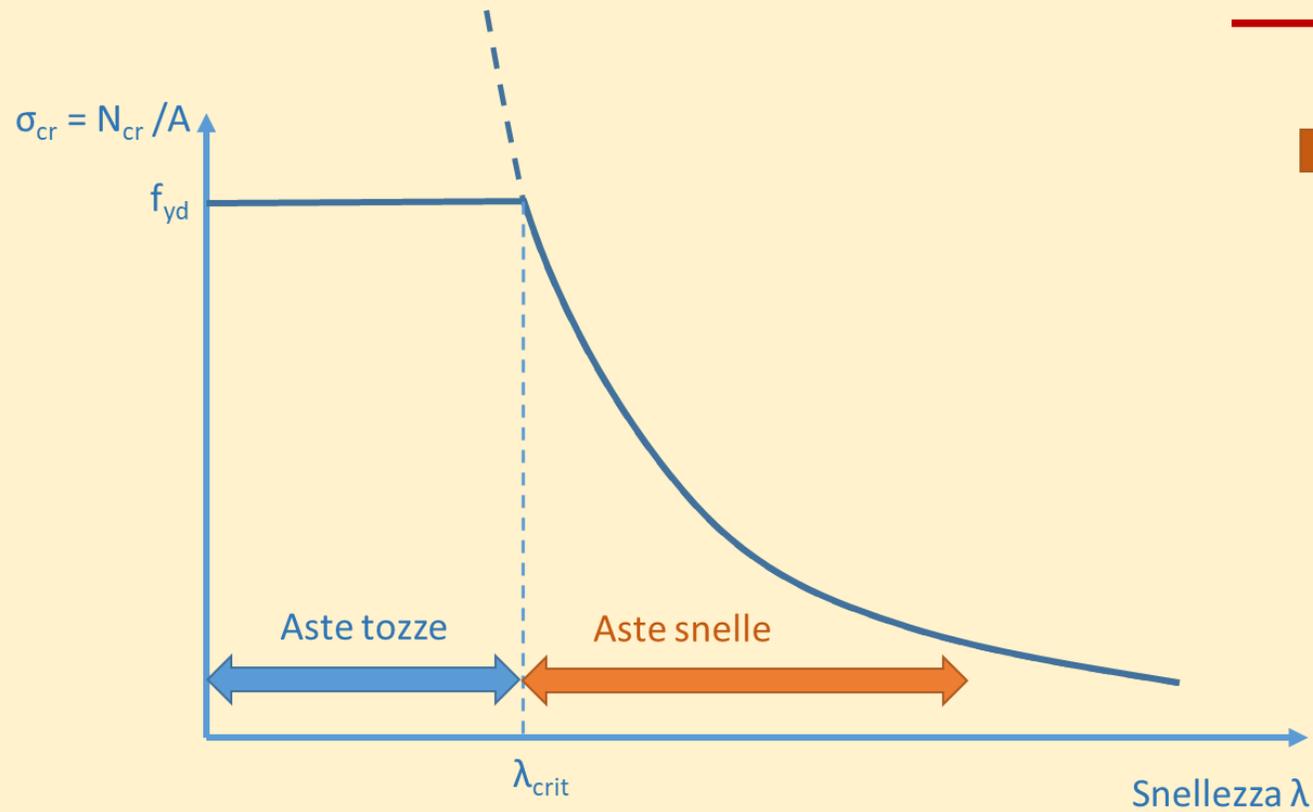
$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E A}{\lambda^2}$$



Carico critico euleriano: instabilità per carico di punta

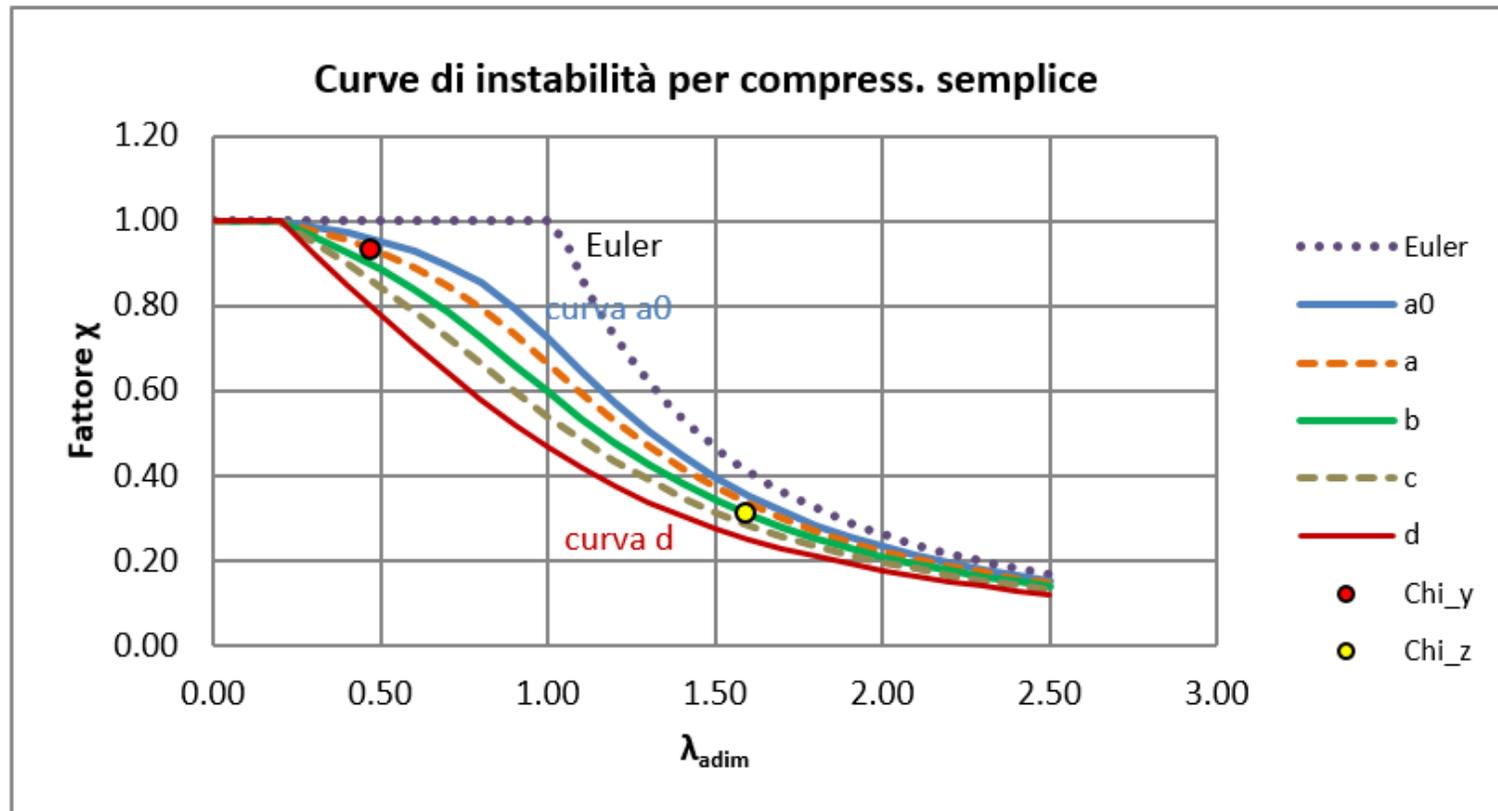
$$\sigma_{cr} = N_{cr}/A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Curva di stabilità euleriana



Prescrizioni delle NTC2018 - Verifica per carico di punta

Curve di stabilità (a_0, a, b, c, d) prescritte dalla Normativa Tecnica NTC2018



Prescrizioni delle NTC2018 - Verifica per carico di punta

4.2.4.1.3 Stabilità delle membrature (Estratto NTC2018)

4.2.4.1.3.1 Aste compresse

La verifica di stabilità di un'asta si effettua nell'ipotesi che la sezione trasversale sia uniformemente compressa. Deve essere

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1 \quad [4.2.41]$$

dove

N_{Ed} è l'azione di compressione di progetto,

$N_{b,Rd}$ è la resistenza di progetto all'instabilità nell'asta compressa, data da

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_{yk}}{\gamma_{M1}} \text{ per le sezioni di classe 1, 2 e 3,} \quad [4.2.42]$$

e da

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A_{eff} f_{yk}}{\gamma_{M1}} \text{ per le sezioni di classe 4} \quad [4.2.43]$$

Formula delle
curve di stabilità
secondo NTC2018

I coefficienti χ dipendono dal tipo di sezione e dal tipo di acciaio impiegato; essi si desumono, in funzione di appropriati valori della snellezza normalizzata $\bar{\lambda}$, dalla seguente formula

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1.0 \quad [4.2.44]$$

dove $\Phi = 0.5 \left[1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2 \right]$, α è il fattore di imperfezione ricavato dalla Tab. 4.2.VIII e la snellezza normalizzata $\bar{\lambda}$ è pari a

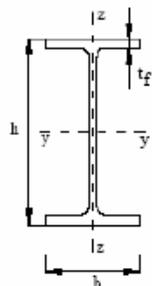
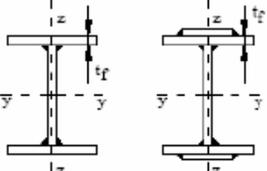
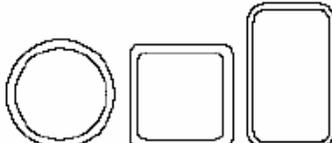
$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_{yk}}{N_{cr}}} \text{ per le sezioni di classe 1, 2 e 3, e a} \quad [4.2.45]$$

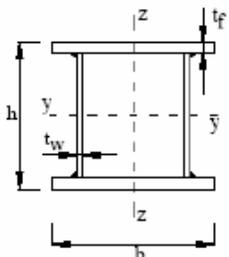
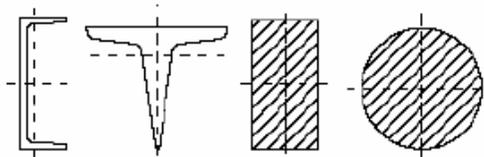
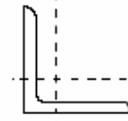
$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff} \cdot f_{yk}}{N_{cr}}} \text{ per le sezioni di classe 4.} \quad [4.2.46]$$

Prescrizioni delle NTC2018 - Verifica per carico di punta

(Estratto NTC2018 – par 4.2.4.1.3.1)

Tab. 4.2.VIII - Curve d'instabilità per varie tipologie di sezioni e classi d'acciaio, per elementi compressi

Sezione trasversale	Limiti	Inflessione intorno all'asse	Curva di instabilità	
			S235, S275, S355, S420	S460
Sezioni laminate 	$h/b > 1,2$	y-y z-z	$t_f \leq 40$ mm	a a ₀
			$40 \text{ mm} < t_f \leq 100$ mm	b c
	$h/b \leq 1,2$	y-y z-z	$t_f \leq 100$ mm	b c
			$t_f > 100$ mm	d c
Sezioni ad I saldate 	$t_f \leq 40$ mm	y-y z-z	b c	
	$t_f > 40$ mm	y-y z-z	c d	
Sezioni cave 	Sezione formata "a caldo"	qualunque	a	a ₀
	Sezione formata "a freddo"	qualunque	c	c

Sezione trasversale	Limiti	Inflessione intorno all'asse	Curva di instabilità				
			S235, S275, S355, S420	S460			
Sezioni scatolari saldate 	In generale	qualunque	b	b			
	saldature "spesse": $a > 0,5t_f$ $b/t_w < 30$; $h/t_w < 30$	qualunque	c	c			
Sezioni piene, ad U e T 		qualunque	c	c			
Sezioni ad L 		qualunque	b	b			
Curva di instabilità			a ₀	a	b	c	d
Fattore di imperfezione α			0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Prescrizioni delle NTC2018 - Verifica per carico di punta

Carico critico
euleriano

(Estratto NTC2018 – par 4.2.4.1.3.1)

N_{cr} è il carico critico elastico basato sulle proprietà della sezione lorda e sulla lunghezza di libera inflessione l_0 dell'asta, calcolato per la modalità di collasso per instabilità appropriata (flessionale, torsionale o flesso-torsionale).

Nel caso in cui $\bar{\lambda}$ sia minore di 0,2 oppure nel caso in cui la sollecitazione di progetto N_{Ed} sia inferiore a $0,04N_{cr}$, gli effetti legati ai fenomeni di instabilità per le aste compresse possono essere trascurati.

Limitazioni della snellezza

Si definisce lunghezza d'inflessione la lunghezza $l_0 = \beta \cdot l$ da sostituire nel calcolo del carico critico elastico N_{cr} alla lunghezza l dell'asta quale risulta dallo schema strutturale. Il coefficiente β deve essere valutato tenendo conto delle effettive condizioni di vincolo dell'asta nel piano di inflessione considerato.

Si definisce snellezza di un'asta nel piano di verifica considerato il rapporto

$$\lambda = l_0 / i \quad [4.2.47]$$

dove

l_0 è la lunghezza d'inflessione nel piano considerato,

i è il raggio d'inerzia relativo.

È opportuno limitare la snellezza λ al valore di 200 per le membrature principali ed a 250 per le membrature secondarie.

Risorsa consigliata per la verifica di stabilità per carico di punta



Esegui la verifica di **stabilità** per **carico di punta** di aste in **acciaio** ai sensi dell'attuale normativa tecnica vigente. Un'app completa per il progetto e verifica di **travi**, **colonne** e **aste pendolo** in acciaio. Calcolo di **collegamenti** bullonati e saldati.

[SCARICA L'APPLICAZIONE >>](#)

marcodepisapia
civilengineer

www.marcodepisapia.com

Altre risorse utili per il calcolo strutturale



Calcola l'intervento di **apertura foro** in solai laterocementizi.
Progetta e verifica **sezioni** in cemento armato e interventi di **rinforzo** con materiali innovativi in **FRP**.

[SCARICA L'APPLICAZIONE >>](#)



Progetta e verifica l'intervento di **apertura vano** e il **telaio di cerchiatura** in una parete in muratura. Calcola il legame taglio-spostamento dell'intera parete **prima e dopo** l'intervento.

[SCARICA L'APPLICAZIONE >>](#)

marcodepisapia
civilengineer

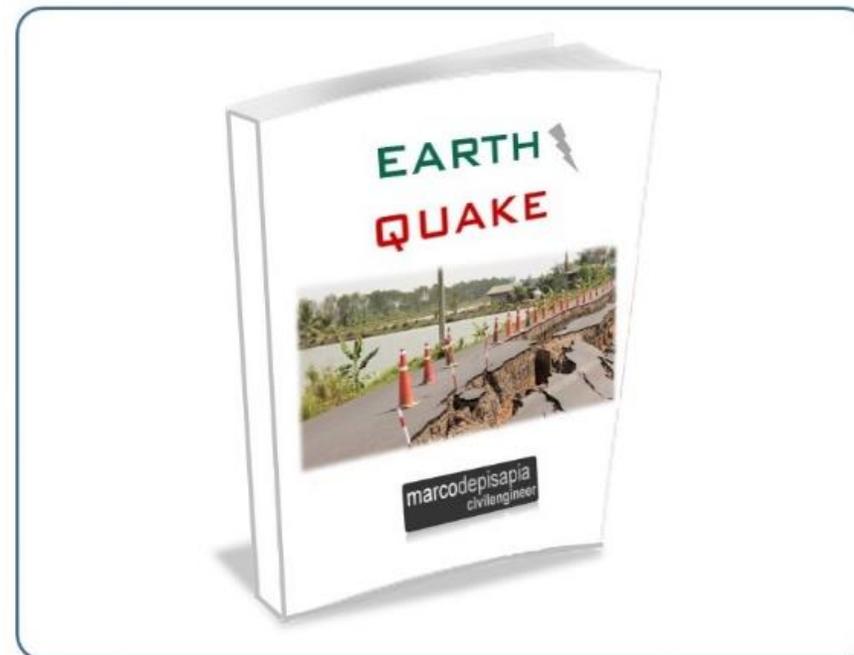
www.marcodepisapia.com

Altre risorse utili per il calcolo strutturale



Analizza le **sollecitazioni** della platea di fondazione, progetta e verifica l'**armatura**, esegui la **verifica geotecnica** per carico limite e scorrimento.

[SCARICA L'APPLICAZIONE >>](#)



La guida pratica in formato PDF per l'**analisi sismica delle strutture**. Un percorso passo passo alla scoperta delle tematiche principali delle costruzioni in **zona sismica**.

[Scarica l'estratto gratuito >>](#)

marcodepisapia
civilengineer

www.marcodepisapia.com

marcodepisapia
civilengineer

www.marcodepisapia.com

Articoli Risorse Applicazioni
per progettisti strutturali